ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:	

Θέμα Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Μονάδες 9

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α και $[\alpha,\beta]\subseteq A$. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β];

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

β) Αν $f(x)\geq 0$ και συνεχής στο [α,β] τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν μηδενίζεται στο πεδίο ορισμού της τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό.

δ) Αν $f'(x)>0$ για κάθε στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ για κάθε στο (x_0,β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ε) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$.

Β1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Β2. Να βρεθούν τα διαστήματα που η συνάρτηση είναι κοίλη, κυρτή καθώς και τα σημεία καμπής της , αν υπάρχουν. **Μονάδες 5**

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\alpha\left(x-\alpha^2\right)e^x, & x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$ με $\alpha\neq 0$ για την οποία ισχύει $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{xf(x)+x}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=-1$ και $x=e$.

Μονάδες 7

Γ5. Αν $\kappa<\lambda<\mu<0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3f(x)=f(\kappa)+f(\lambda)+f(\mu)$ έχει μοναδική ρίζα στο (κ,μ).

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(3)=0$, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε: $f'(x)=-\dfrac{2}{f^2(x)+5}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο αυτής.

Μονάδες 2

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 3

Δ3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3f(x)=3-x$ έχει τρεις τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες $k_1,\ k_2,\ k_3\ \in\mathbb{R}$ με $k_1<k_2<k_3$.

Μονάδες 7

Δ5. Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που ορίζεται από την c_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες: $x=\frac{1}{3}, x=3$

Μονάδες 7

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1.

Για $x\neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Α2.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$$

Α3. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

Θέμα Β

B1. Πρέπει το υπόριζο να είναι μη αρνητικό, δηλαδή: $x^2+2x+2\geq 0$ και είναι: $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot 2=4-8=-4$ επομένως ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς , δηλαδή $A=\mathbb{R}$.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=(\sqrt{x^2+2x+2})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+2}}\cdot(x^2+2x+2)'\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$. Είναι: $f'(x)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Ισχύει:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}>0\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1 \text{ επίσης}$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}<0\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$, ενώ γνησίως φθίνουσα στο $[-1,+\infty)$.
Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=-1 με τιμή:
$f(-1)=\sqrt{(-1)^2+2\cdot(-1)+2}=1$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}\overset{x\to-\infty}{\underset{x<0}{=}}\lim_{x\to-\infty}(-x)\cdot\sqrt{(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}\overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}}\lim_{x\to+\infty}x\cdot\sqrt{(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}=+\infty$$

Επομένως για το σύνολο τιμών της συνάρτησης έχουμε:

$$f((-\infty,-1))=(\lim_{x\to-1^-}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x))=(1,+\infty)$$

$$f([-1,+\infty))=[f(-1),\lim_{x\to+\infty}f(x))=[1,+\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το
$f(\mathbb{R})=f((-\infty,-1))\cup f([1,+\infty))=[1,+\infty)$.

B2. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x)=\frac{(x+1)'\cdot\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)\cdot(\sqrt{x^2+2x+2})'}{(\sqrt{x^2+2x+2})^2}\Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)\cdot\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{(\sqrt{x^2+2x+2})^2}=\frac{x^2+2x+2-x^2-2x-1}{(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}}$$

Επομένως: $f''(x)=\dfrac{1}{(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}}>0$ δηλαδή η συνάρτηση f(x) είναι κυρτή.

B3. H f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες.
Για πλάγιες στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\cdot\sqrt{(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2})}}{x}=-1\sqrt{1+0+0}=-1$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}+x)\Leftrightarrow$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+2}+x)\cdot(\sqrt{x^2+2x+2}-x)}{(\sqrt{x^2+2x+2}-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+2})^2-x^2}{(-x)\cdot\sqrt{(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2})}-x}\Leftrightarrow$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2}{(-x)\cdot\sqrt{(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2})}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot(2+\dfrac{2}{x})}{-x\cdot(\sqrt{(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2})}+1)}=\frac{2}{-(\sqrt{1}+1)}=-1$$

Επομένως η ασύμπτωτη είναι η : $y=-x-1$.
Για πλάγιες στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2})}}{x}=1\sqrt{1+0+0}=1$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-x)\Leftrightarrow$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+2}-x)\cdot(\sqrt{x^2+2x+2}+x)}{(\sqrt{x^2+2x+2}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+2})^2-x^2}{x\cdot\sqrt{(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}+x}\Leftrightarrow$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2}{x\cdot\sqrt{(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(2+\frac{2}{x})}{x\cdot(\sqrt{(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}+1)}=\frac{2}{(\sqrt{1}+1)}=1$$

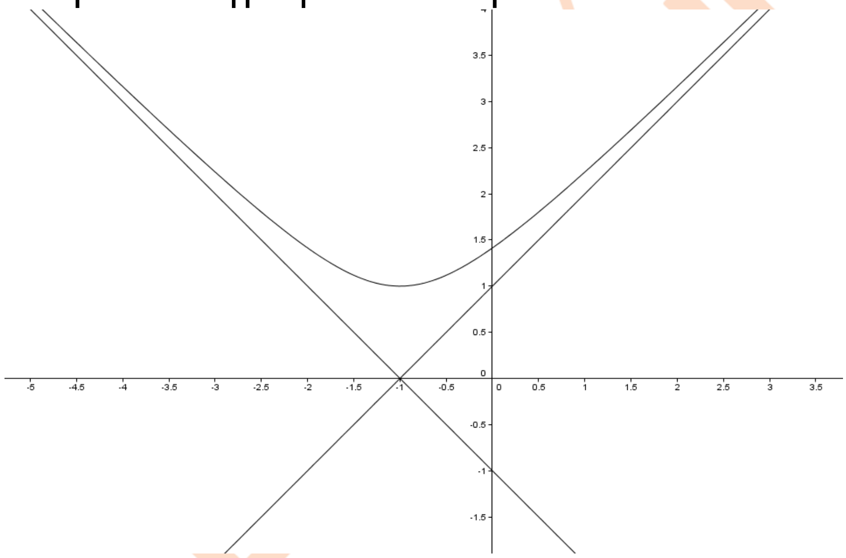
Επομένως η ασύμπτωτη είναι η : $y=x+1$.

Β4. Η συνάρτηση f είναι φθίνουσα και κυρτή $x\in(-\infty,-1]$, αύξουσα και κυρτή $x\in[-1,+\infty)$, παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-1$ με τιμή $f(-1)=1$ και ασύμπτωτες τις $y=-x-1$ στο $-\infty$, $y=x+1$ στο $+\infty$.

Άρα συγκεντρωτικά:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	+		+
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	Ο Ε	↗ $+\infty$

Επομένως η γραφική της παράσταση είναι η ακόλουθη:



Θέμα Γ

Γ1. Ισχύει $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in(-1,1)$ άρα η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ ακρότατο. Το $x_0=0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1,1)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής. Συνεπώς ισχύει το Θεώρημα Fermat, άρα $f'(0)=0$

Για κάθε $x<1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής με

$$f'(x)=\alpha e^x+\alpha\left(x-\alpha^2\right)e^x=e^x\left(\alpha+\alpha x-\alpha^3\right)$$

$$f'(0)=0\Leftrightarrow \alpha-\alpha^3=0\Leftrightarrow \alpha\left(1-\alpha^2\right)=0\Leftrightarrow$$

$\alpha=0$ απορρίπτεται αφού $\alpha\neq 0$ από υπόθεση ή $\alpha=\pm1$.

• Για $\alpha=-1$ και για κάθε $x<1$ έχουμε:

$$f(x)=-(x-1)e^x$$

Η f είναι συνεχής ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής.
Η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής με

$$f'(x)=-e^x-(x-1)e^x=-xe^x$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow -xe^x>0\Leftrightarrow -x>0\Leftrightarrow x<0$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow -xe^x<0\Leftrightarrow -x<0\Leftrightarrow x>0$$

x	$-\infty$	0	1
f'	+	0	−
f	↗		↘

Συνεπώς η f παρουσιάζει για x=0 μέγιστο το $f(0)$ άρα για κάθε $x<1$ ισχύει $f(x)\leq f(0)$.
Άτοπο γιατί από υπόθεση $f(x)\geq f(0)$ άρα η τιμή $\alpha=-1$ απορρίπτεται.

• Για $\alpha=1$ και για κάθε $x<1$ έχουμε:

$$f(x)=(x-1)e^x$$

$$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow xe^x>0\Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow xe^x<0\Leftrightarrow x<0$$

x	$-\infty$	0	1
f'	−	0	+
f	↘		↗

Συνεπώς η f παρουσιάζει για x=0 ελάχιστο το $f(0)$ άρα για κάθε $x<1$ ισχύει $f(x)\geq f(0)$ άρα η τιμή $\alpha=1$ είναι δεκτή.

Γ2. Για $\alpha=1$ η συνάρτηση f γίνεται: $f(x)=\begin{cases}(x-1)e^x, & x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$

Για κάθε $x<1$ η f είναι συνεχής ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής.
Για κάθε $x>1$ η f είναι συνεχής ως λογαριθμική.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left((x-1)e^x\right)=0\\&\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(\ln x)=0\\&f(1)=0\end{aligned}\right\}\text{ άρα }\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)$$

άρα η f είναι συνεχής και στο $x=1$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{xf(x)+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x(f(x)+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\dfrac{1}{(f(x)+1)}\right)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1)=0$ με $(f(x)+1)>0$ για κάθε

$x\in(-1,0)\cup(0,1)$ από τοπικό ακρότατο, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(f(x)+1)}=+\infty$.

Γ4. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$E=\int_{-1}^{e}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+\int_{1}^{e}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}\left|(x-1)e^x\right|dx+\int_{1}^{e}|\ln x|dx$$

όμως για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει

$-1\le x\le 1\Leftrightarrow -2\le x-1\le 0\Leftrightarrow -2e^x\le(x-1)e^x\le 0$

και για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει

$1\le x\le e\Leftrightarrow \ln 1\le \ln x\le \ln e\Leftrightarrow 0\le \ln x\le 1$ συνεπώς

$$E=-\int_{-1}^{1}(x-1)e^x dx+\int_{1}^{e}\ln x dx$$

$\cdot\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-1)e^x dx=\int_{-1}^{1}(x-1)\left(e^x\right)' dx=\left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}e^x dx=$

$-2e^{-1}-\left[e^x\right]_{-1}^{1}=-2e^{-1}-e+e^{-1}=-e-e^{-1}$

$\cdot\displaystyle\int_{1}^{e}\ln x dx=\int_{1}^{e}x'\ln x dx=[x\ln x]_1^e-\int_{1}^{e}1dx=e-[x]_1^e=1$

Συνεπώς $E=-\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-1)e^x dx+\int_{1}^{e}\ln x dx=e+e^{-1}+1$ τ. μ.

Γ5. Από το ερώτημα α) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

$k<\lambda\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\kappa)>f(\lambda)$, $k<\mu\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\kappa)>f(\mu)$ και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$2f(\kappa)>f(\lambda)+f(\mu)\Leftrightarrow 3f(\kappa)>f(\kappa)+f(\lambda)+f(\mu)\Leftrightarrow f(\kappa)>\frac{f(\kappa)+f(\lambda)+f(\mu)}{3}$$

επίσης $\lambda<\mu\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\lambda)>f(\mu)$, $k<\mu\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\kappa)>f(\mu)$

και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$f(\kappa)+f(\lambda)>2f(\mu)\Leftrightarrow f(\kappa)+f(\lambda)+f(\mu)>3f(\mu)\Leftrightarrow f(\mu)<\frac{f(\kappa)+f(\lambda)+f(\mu)}{3}$$

τελικά ισχύει $f(\mu)<\dfrac{f(\kappa)+f(\lambda)+f(\mu)}{3}<f(\kappa)$

Η f είναι συνεχής στο $[\kappa,\mu]\subseteq\mathbb{R}$ από το ερώτημα β)

Ισχύει $f(\kappa)\neq f(\mu)$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\kappa,\mu]\subseteq(-\infty,0]$

Επίσης $f(\mu)<\dfrac{f(\kappa)+f(\lambda)+f(\mu)}{3}<f(\kappa)$

άρα ισχύει το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\kappa,\mu)$ τέτοιο ώστε

$f(x_0)=\dfrac{f(\kappa)+f(\lambda)+f(\mu)}{3}\Leftrightarrow 3f(x_0)=f(\kappa)+f(\lambda)+f(\mu)$, το x_0 μοναδικό στο (κ,μ) γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-\dfrac{2}{f^2(x)+5}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Ισχύει $f(3)=0$ άρα για κάθε x με

$x<3\Leftrightarrow f(x)>f(3)\Leftrightarrow f(x)>0$

$x>3\Leftrightarrow f(x)<f(3)\Leftrightarrow f(x)<0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		+	0	−	

Δ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση, άθροισμα και πηλίκο παραγωγίσιμων με $\left(f'(x)\right)'=\left(-\dfrac{2}{f^2(x)+5}\right)'\Leftrightarrow f''(x)=\dfrac{4f(x)f'(x)}{\left(f^2(x)+5\right)^2}$

Επομένως: $f''(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=3$ αφού $\dfrac{4f'(x)}{\left(f^2(x)+5\right)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Ακόμα

$f''(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{4f(x)f'(x)}{\left(f^2(x)+5\right)^2}>0\Leftrightarrow f(x)<3\Leftrightarrow x>3$ αφού $\dfrac{4f'(x)}{\left(f^2(x)+5\right)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπως προκύπτει από το (α)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$

Συνεπώς αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$ η f κοίλη στο $(-\infty,3]$ αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$ η f κυρτή στο $[3,+\infty)$

Η f αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του 3 και δέχεται εφαπτομένη στο $K(3,f(3))$ (αφού f παραγωγίσιμη στο 3) άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $K(3,f(3))$ ή $K(3,0)$

Δ3. Αφού η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=-\frac{2}{f^2(x)+5}\Leftrightarrow f'(x)f^2(x)+5f'(x)=-2\Leftrightarrow$$

$$3f'(x)f^2(x)+15f'(x)+6=0\Leftrightarrow\left(f^3(x)+15f(x)+6x\right)'=0$$

και αφού η $f^3(x)+15f(x)+6x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση άθροισμα και γινόμενο συνεχών από συνέπειες θεωρήματος μέσης τιμής θα ισχύει:

$f^3(x)+15f(x)+6x=c$, $c\in\mathbb{R}$ και αφού $f(3)=0$ παίρνουμε:

$f^3(3)+15f(3)+18=c\Leftrightarrow c=18$ άρα $f^3(x)+15f(x)+6x-18=0$

Στην παραπάνω σχέση θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε

$y^3+15y+6f^{-1}(y)-18=0, y\in\mathbb{R}$ (αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$) ή

$$f^{-1}(y)=3-\frac{y^3+15y}{6}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\frac{y^3}{6}-\frac{5}{2}y+3,\ y\in\mathbb{R}$$ επομένως

$$f^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x+3,\ x\in\mathbb{R},\ \text{ αφού } f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$$

Δ4. Έχουμε:

$$3f(x)=3-x\Leftrightarrow f(x)=1-\frac{1}{3}x\Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(1-\frac{1}{3}x\right)\Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}x\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}x\right)+3\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}x\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}x\right)-x+3=0$$

Έστω $w(x)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}x\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}x\right)-x+3$, $x\in\mathbb{R}$

Η w συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και διαφορά άρα και στο $[-3,0]$

$$w(-3)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}(-3)\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}(-3)\right)+3+3=-\frac{1}{3}<0$$

$$w(0)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}0\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}0\right)+3=-\frac{1}{6}-\frac{5}{2}+3=\frac{1}{3}>0$$

δηλαδή $w(-3)w(0)<0$

άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $k_1\in(-3,0)$ τέτοιο ώστε $w(k_1)=0\Leftrightarrow 3f(k_1)=3-k_1$

Παρατηρούμε ότι: $w(3)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}3\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}3\right)-3+3=0$

έστω $k_2=3$ τότε $w(k_2)=0\Leftrightarrow 3f(k_2)=3-k_2$

Η w συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και διαφορά άρα και στο $[6,12]$

$$w(6)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}6\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}6\right)-6+3=\frac{1}{6}+\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{3}<0$$

$$w(12)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}12\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}12\right)-12+3=\frac{27}{6}+\frac{15}{2}-9=3>0$$

δηλαδή $w(6)w(12)<0$

άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $k_3\in(6,12)$ τέτοιο ώστε $w(k_3)=0\Leftrightarrow 3f(k_3)=3-k_3$

Άρα η εξίσωση $3f(x)=3-x$ έχει τρεις τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες $k_1,\ k_2,\ k_3\ \in\mathbb{R}$ με $k_1<k_2<k_3$

Δ5. Από το ερώτημα (α) έχουμε $f(3)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x<3$ και αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για το ζητούμενο εμβαδόν θα ισχύει:

$$E=\int_{\frac{1}{3}}^{3}|f(x)|dx=\int_{\frac{1}{3}}^{3}f(x)dx\ (1)$$

Είναι $f(3)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=3$ και $f^{-1}(1)=-\frac{1}{6}-\frac{5}{2}+3=\frac{1}{3}$

Στην σχέση (1) θέτουμε $x=f^{-1}(t)$ (η f^{-1} συνεχής και «1-1» στο $\mathbb{R}$)

$$x=f^{-1}(t) \text{ τότε } \begin{cases} dx=\left(-\frac{1}{6}t^3-\frac{5}{2}t+3\right)' dt \Rightarrow dx=\left(-\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}\right)dt \\ x_1=\frac{1}{3} \Leftrightarrow f^{-1}(t_1)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow t_1=f\left(\frac{1}{3}\right)=1 \\ x_2=3 \Leftrightarrow f^{-1}(t_2)=3 \Leftrightarrow t_2=f(3)=0 \end{cases}$$

Τότε από (1) έχουμε:

$$E=\int_{\frac{1}{3}}^{3} f(x)dx=\int_{1}^{0} f(f^{-1}(t))(-\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2})dt=-\frac{1}{2}\int_{1}^{0} t(t^2+5)dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1} t(t^2+5)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}+\frac{5}{2}t^2\right]_0^1=\frac{11}{8} \text{ τ. μ}$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βυνιχάκης, Α. Δουλγεράκης, Μ. Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη, Π. Σιδερής, Α. Τσιλιφώνης.