ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:	

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Μονάδες 6

Α2. Πότε δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Rolle.

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0.

β) Αν για την συνάρτηση f είναι $f'(x)=0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

γ) Αν x_0 εσωτερικό σημείο του Δ και f παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

δ) Αν η $f: A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται ισχύει $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x \in f(A)$.

ε) Κρίσιμα σημεία της f είναι όλες οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda}{x}-2+e^{2x}$, $x>0$, $\lambda>0$ και η συνάρτηση h τέτοια ώστε: $h(x)+x^2f'(x)=0$, για κάθε $x>0$.

Β1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $h(1)=0$, να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών και το πρόσημό της.

Μονάδες 6

Β3. Για $\lambda=2e^2$ να δείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη c_f στο σημείο $M(\rho,f(\rho))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $K(1,3e^2-2)$, $\Lambda(2,f(2))$.

Μονάδες 7

Β4. Για $\lambda=2e^2$ να δείξετε ότι ισχύει $f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<e^2(e^2-2)<f'(e+1)$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν : $f(1)=e$, $f'(1)=0$ και $f''(x)=x^{-3}e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x>0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}$ και ότι ο τύπος της f είναι

$f(x)=xe^{\frac{1}{x}},\quad x>0$.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της $f(x)=2017$.

Μονάδες 7

Γ3. Αν η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x\ln x-\frac{e+1}{2}x^2$, $x>0$ να αποδείξετε ότι:

ι) η γραφική παράσταση της g έχει μοναδικό σημείο καμπής το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 7

ιι) η ευθεία με εξίσωση $y=-ex+\frac{3e-1}{2}$ "διαπερνά" τη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες 3

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2+1)\ln x-\frac{x^2}{2}+c,\ x>0$ και $F:(0,+\infty)\to(1,+\infty)$ μια αρχική της f για την οποία ισχύει $F(e)=F(1)+\frac{e^3+9e+14}{18}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $c=\frac{1}{2}$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $A(x_0,f(x_0))$, $x_0\in(0,1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρείτε την εφαπτομένη της f στο $x_0=1$ και να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e f(F(x))dx>2e-2.$$

Μονάδες 4

Δ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της f^{-1}, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=0 και $x=f(e)$.

Μονάδες 5

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Για $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,

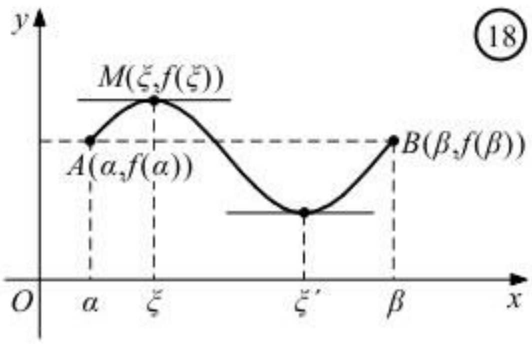
οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες όταν, έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει f(x)=g(x).

Α3. Αν μια συνάρτηση f είναι :
συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)
και f(α) = f(β)
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ϵ (α, β) τέτοιο, ώστε : $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ϵ (α,β) τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της Cf στο M(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



Α4. **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. Για $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$f'(x) = 2e^{2x} - \dfrac{\lambda}{x^2}$, $\lambda > 0$ άρα

$$h(x) + x^2 f'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) + x^2\left(2e^{2x} - \frac{\lambda}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow h(x) = \lambda - 2x^2 e^{2x}, \quad \lambda > 0$$

Η h παραγωγίσιμη ως διαφορά γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων για $x > 0$ με $h'(x) = -4xe^{2x} - 2x^2 2e^{2x} = -4xe^{2x}(1+x) < 0$ για κάθε $x > 0$
και αφού η h συνεχής στο $(0,+\infty)$ η h γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} (\lambda - 2x^2 e^{2x}) = \lambda$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (\lambda - 2x^2 e^{2x}) = -\infty$$

Αφού η h συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ το σύνολο τιμών της θα είναι το $(-\infty,\lambda)$, $\lambda > 0$

Αλλά το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$. Το x_0 μοναδικό αφού η h γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Β2. $h(1)=0 \Leftrightarrow \lambda-2e^2=0 \Leftrightarrow \lambda=2e^2$ συνεπώς $f(x)=\dfrac{2e^2}{x}-2+e^{2x}$, $x>0$ και

$f'(x)=2e^{2x}-\dfrac{2e^2}{x^2}$, $x>0$

Η f' παραγωγίσιμη για $x>0$ ως σύνθεση διαφορά και πηλίκο

παραγωγίσιμων με $f''(x)=4e^{2x}+\dfrac{4e^2}{x^3}>0$ για κάθε $x>0$

άρα η f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Είναι $h(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=0$ άρα:

Για $0<x<1$ έχουμε $f'(x)<f'(1) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και f συνεχής στο $(0,1]$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Για $x>1$ έχουμε $f'(x)>f'(1) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και f συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=3e^2-2>0$

Ακόμα: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{2x}-2+\dfrac{2e^2}{x}\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2e^2}{x}\right)=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{2x}-2+\dfrac{2e^2}{x}\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2e^2}{x}\right)=0$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[3e^2-2,+\infty)$

Θα είναι $f(x)\geq 3e^2-2>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

Β3. $f(x)=\dfrac{2e^2}{x}-2+e^{2x}$, $x>0$

Η f είναι συνεχής ως πηλίκο άθροισμα διαφορά και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων στο $[1,2]\subseteq(0,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως γινόμενο, άθροισμα, διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=2e^{2x}-\dfrac{2e^2}{x^2}$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(1,2)$ τέτοιο ώστε, $f'(\rho)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$ δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία στη c_f στο σημείο $M(\rho,f(\rho))$ είναι παράλληλη στην ευθεία ΚΛ αφού $f(1)=3e^2-2$ και $\lambda_{AB}=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$

Β4. Είναι $f'(\rho)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=e^2(e^2-2)$

Ακόμα $\dfrac{e}{2}-1<1<\rho<2<e+1$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα από το ερώτημα Β2) άρα:

$$f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<f'(1)<f'(\rho)<f'(2)<f'(e+1)\Leftrightarrow f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<f'(\rho)<f'(e+1)\Leftrightarrow$$

$$f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<e^2(e^2-2)<f'(e+1)$$

Θέμα Γ

Γ1. $f''(x)=x^{-3}e^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow f''(x)=\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow f''(x)=\dfrac{1}{x}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)'\Leftrightarrow$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\right)'-\left(\frac{1}{x}\right)'\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Leftrightarrow f''(x)=\left(\frac{1}{x}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\right)'+\frac{1}{x^2}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Leftrightarrow$$

$$(f'(x))'=\left(-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}\right)'$$

Τότε από συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής έχουμε:

$$f'(x)=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}+c\ (1)$$

Για x=1 έχουμε: $f'(1)=-e+e+c\overset{f'(1)=0}{\Leftrightarrow}c=0$

Τότε από την σχέση (1) έχουμε:

$$f'(x)=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow f'(x)=-x\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow (f(x))'=\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)'$$

Τότε από συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής έχουμε: $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}+c_1$ (2)

Για x=1 έχουμε: $f(1)=e+c_1 \overset{f(1)=e}{\Leftrightarrow} c_1=0$

Τότε από την σχέση (2) έχουμε: $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$, $x>0$

Γ2. Είναι $f'(x)=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)>0 \overset{e^{\frac{1}{x}}>0}{\Leftrightarrow} \frac{x-1}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

x	0	1	+∞
f'	−	0	+
f	↘		↗

Αφού η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ είναι και συνεχής σε αυτό. Από τον πίνακα μονοτονίας έχουμε:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Έστω $\Delta_1=(0,1)$, $\Delta_2=[1,+\infty)$

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to1}f(x), \lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=(e,+\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to1}f(x) \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} f(1)=e$ και

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)\underset{D.L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to+\infty}e^u=+\infty$$

$f(\Delta_2)=\left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[e,+\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{u\to0}e^u=1$

Επειδή $2017\in f(\Delta_1)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=2017$. Το x_1 είναι μοναδικό στο Δ_1 γιατί f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

Επειδή $2017 \in f(\Delta_2)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=2017$. Το x_2 είναι μοναδικό στο Δ_2 γιατί f γνησίως αύξουσα στο Δ_2.
Άρα η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Γ3. i) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
$g'(x)=f'(x)+\ln x+1-(e+1)x,\ x>0$
Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g''(x)=f''(x)+\dfrac{1}{x}-(e+1),\ x>0$
Η g'' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'''(x)=f'''(x)-\frac{1}{x^2}=\left(x^{-3}e^{\frac{1}{x}}\right)'-\frac{1}{x^2}=-3x^{-4}e^{\frac{1}{x}}-x^{-3}e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$g'''(x)=-3x^{-4}e^{\frac{1}{x}}-x^{-5}e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2},\ x>0$$

Συνεπώς για κάθε $x>0$ είναι $g'''(x)<0$ άρα η g'' γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g''(1)=0$. Τότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ με

$$x>1\overset{g''\searrow}{\Leftrightarrow}g''(x)<g''(1)\Leftrightarrow g''(x)<0$$

και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ με $x<1\overset{g''\searrow}{\Leftrightarrow}g''(x)>g''(1)\Leftrightarrow g''(x)>0$

x	0	1	+∞
g''	+	0	−
g	∪		∩

Η g παρουσιάζει σημείο καμπής το $(1,g(1))$ ή $\left(1,\dfrac{e-1}{2}\right)$ αφού αλλάζει η κυρτότητα εκατέρωθεν του $x_1=1$ και δέχεται εφαπτομένη στο $\left(1,\dfrac{e-1}{2}\right)$ αφού είναι παραγωγίσιμη.

ii) Είναι $g(1)=\dfrac{e-1}{2}$ και $g'(1)=-e$. Η εφαπτομένη της c_g στο $\left(1,\dfrac{e-1}{2}\right)$ θα έχει εξίσωση:

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\frac{e-1}{2}=-e(x-1)\Leftrightarrow y=-ex+\frac{3e-1}{2}$$

η οποία "διαπερνά" τη γραφική παράσταση της g, διότι είναι εφαπτομένη της στο σημείο καμπής της.

Θέμα Δ

Δ1. $F(e)=F(1)+\dfrac{e^3+9e+14}{18}\Leftrightarrow F(e)-F(1)=\dfrac{e^3+9e+14}{18}$

και αφού F μια αρχική της f από το Θεμελιώδες Θεώρημα το ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε:

$$F(e)-F(1)=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left((x^2+1)\ln x-\frac{x^2}{2}+c\right)dx=$$

$$\int_1^e\left(\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln x\right)dx+\left[-\frac{x^3}{6}+cx\right]_1^e=$$

$$\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx-\frac{e^3-1}{6}+c(e-1)=\frac{e^3+23+18c(e-1)}{18}$$

$$\Leftrightarrow\frac{e^3+9e+14}{18}=\frac{e^3+23+18c(e-1)}{18}\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και άθροισμα παραγωγίσιμων με $f'(x)=2x\ln x+x+\dfrac{1}{x}-x=2x\ln x+\dfrac{1}{x}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο, άθροισμα και πηλίκο παραγωγίσιμων με $f''(x)=2\ln x+2-\dfrac{1}{x^2}$.

Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο, άθροισμα και πηλίκο παραγωγίσιμων με $f'''(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^3}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα. $\lim\limits_{x\to 0^+}f''(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\ln x+2-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ άρα υπάρχει $x_1>0$ "κοντά" στο 0 τέτοιο ώστε $f''(x_1)<0$. $f''(1)=2\ln 1+2-\dfrac{1}{1^2}=1>0$.

Η f'' είναι συνεχής στο $[x_1,1]$ ως γινόμενο, άθροισμα και πηλίκο συνεχών, $f''(x_1)''f(1)<0$ άρα ισχύει το Θεώρημα Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1,1) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$. Το x_0 μοναδικό αφού f'' είναι γνησίως αύξουσα άρα και "1-1".

Για κάθε

$$x > x_0 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) < 0$$

x	0 x_0	$+\infty$
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

Άρα η f αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 (δέχεται εφαπτομένη) άρα το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Δ3. Αφού η f' συνεχής στο $(0,+\infty)$ και σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα η f' παρουσιάζει για x_0 ολικό ελάχιστο το

$$f'(x_0) = 2x_0 \ln x_0 + \frac{1}{x_0}.$$

x	0 x_0	$+\infty$
f''	$-$	$+$
f'	$\searrow$	$\nearrow$

Ισχύει $f''(x_0)=0 \Leftrightarrow 2\ln x_0 + 2 - \dfrac{1}{x_0^{\,2}} = 0$.

Από τις δυο προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$f'(x_0) = 2x_0 \ln x_0 + \frac{1}{x_0} = x_0\left(\frac{1}{x_0^{\,2}} - 2\right) + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{x_0} - 2x_0 = 2\left(\frac{1-x_0^{\,2}}{x_0^{\,2}}\right) > 0 \text{ αφού}$$

$x_0 \in (x_1,1) \subseteq (0,1)$.

Άρα $f'(x) \geq f'(x_0) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ4. Η εφαπτομένη στο x=1 θα είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x-1$

Από το ερώτημα Β) η f είναι κυρτή στο $[x_0,+\infty)$ με $x_0 < 1$ και η $y = x-1$ είναι εφαπτομένη, άρα για κάθε $x \geq 1$ θα ισχύει

$f(x) \geq x+1$ (1). Αλλά $F(x) > 1$ για κάθε $x > 0$ συνεπώς για $x = F(w)$ στην (1) έχουμε: $f(F(w)) \geq F(w)+1$ ή

$$f(F(x)) \geq F(x)+1 > 2 \Rightarrow \int_1^e f(F(x))dx > \int_1^e 2dx \Rightarrow \int_1^e f(F(x))dx > 2e-2$$

Δ5. Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι $E=\int_0^{f(e)}\left|f^{-1}(x)\right|dx$. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο τιμών της f^{-1} άρα $f^{-1}(x)>0$. Άρα

$$E=\int_0^{f(e)}\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^{f(e)}f^{-1}(x)dx \text{ Θέτουμε } x=f(\omega)\ \begin{cases} x=0\Leftrightarrow \omega=1\\ x=f(e)\Leftrightarrow \omega=e\\ dx=f'(\omega)d\omega\end{cases}$$

$$E=\int_1^e f^{-1}(f(\omega))f'(\omega)d\omega=\int_1^e \omega\left(2\omega\ln\omega+\frac{1}{\omega}\right)d\omega=\int_1^e(2\omega^2\ln\omega+1)d\omega=$$

$$\left[\frac{2\omega^3}{3}\ln\omega\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{2}{3}\omega^2\right)d\omega+[\omega]_1^e=\frac{2e^3}{3}-\frac{2e^3}{9}+\frac{2}{9}+e-1=$$

$$\frac{4e^3+9e-7}{9}\text{ τ. μ.}$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βυνιχάκης, Α. Δουλγεράκης, Μ. Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη, Π. Σιδερής, Α. Τσιλιφώνης.