ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ.28

Α2. α) Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ.59

β) Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ.59

Α3. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή $s^2 = 4 \Rightarrow s = \sqrt{4} = 2$, επίσης:

$$CV = 20\% \Leftrightarrow CV = 0,2 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = 0,2 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{2}{0,2} = 10.$$

B2. Είναι:

$$\bar{x}=10 \Leftrightarrow \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6}=10 \Leftrightarrow \kappa+52=60 \Leftrightarrow$$

$\kappa=8$

B3. Είναι το δείγμα σε αύξουσα σειρά: 7,8,10,11,11,13
Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της τρίτης και της τέταρτης παρατήρησης δηλαδή: $\delta=\frac{10+11}{2}=10,5.$

Το εύρος είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση, δηλαδή: $R=13-7=6.$

B4. Αν συμβολίσουμε τις νέες τιμές της μεταβλητής $y_i=x_i-2$ με μέση τιμή $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση s_y έχουμε: $\bar{y}=\bar{x}-2=10-2=8$, $s_y=s=2$ συνεπώς:

$CV_y\% = \dfrac{s_y}{\bar{y}} \cdot 100\% = 25\% > 10\%$, επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}}(x^2 - 2x + 10)' =$$

$$\frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

Γ2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$

Η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Η f(x) παρουσιάζει για x=1 ελάχιστο το

$f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot 1+10}=\sqrt{9}=3$

Από ορισμό ελαχίστου ισχύει

$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3.Είναι y=λx+β η εξίσωση εφαπτομένης.

$f(5) = \sqrt{5^2 - 2\cdot 5 + 10} = \sqrt{25} = 5$ και $\lambda = f'(5) = \dfrac{5-1}{5} = \dfrac{4}{5}$

άρα $y = \dfrac{4}{5}x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο Μ(5,5)

άρα $5 = \dfrac{4}{5}\cdot 5 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$.Τελικά $y = \dfrac{4}{5}x + 1$

Γ4. Σημείο τομής με x'x: $0=\frac{4}{5}x+1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$

Άρα $A\left(-\frac{5}{4},0\right)$

Σημείο τομής με y'y: $y=\frac{4}{5}\cdot 0+1 \Leftrightarrow y=1$ άρα Β(0,1)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για λ=3

$f(x)=x^3-3x^2+\lambda x,\ \ A=\mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2\geq 0$

Ο πίνακας προσήμων της f’(x), μονοτονίας της f(x)έχει ως εξής

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Αφού

$$\frac{3}{8}=\frac{9}{24}<\frac{5}{6}=\frac{20}{24}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{9}{24}\right)<f\left(\frac{20}{24}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$$

Δ2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)x\left(x-1\right)}=$$

$= 3 \cdot 2 = 6$

Δ3. Η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης όταν η παράγωγος της συνάρτησης παρουσιάζει ελάχιστο. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f''(x) = (3x^2 - 6x + 3)' = 6x - 6$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘		↗

Επομένως η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης για $x=1$ με
$f(1)=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1=1$ επομένως το σημείο Μ(1,1).

Δ4. Για να μην παρουσιάζει ακρότατα η συνάρτηση πρέπει να είναι γνησίως μονότονη. Είναι :
$f'(x)=(x^3-3x^2+\lambda x)'=3x^2-6x+\lambda$.
Πρέπει $3x^2-6x+\lambda\geq 0$ (α=3>0) άρα
$\Delta=6^2-4\cdot 3\cdot\lambda=36-12\lambda$.
$\Delta\leq 0\Leftrightarrow 36-12\lambda\leq 0\Leftrightarrow 36\leq 12\lambda\Leftrightarrow 3\leq\lambda$. Επομένως η μικρότερη τιμή του λ για την οποία η f δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι: $\lambda=3$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βυνιχάκης, Α. Δουλγεράκης,

**Μ. Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη, Π. Σιδερής,
Α. Τσιλιφώνης, Γ. Φαρσάρης, Μ. Χαρωνιτάκη**