ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:	

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 9

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

β) Αν x_0 θέση τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης f τότε ισχύει πάντα $f'(x_0)=0$.

γ) Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x \in R^*$ τότε η f είναι σταθερή στο R*.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα x_0 του πεδίου ορισμού της τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

ε) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 1 \\ e^{1-\alpha x}-\alpha, & x>1 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι α=1.

Μονάδες 4

Β2. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=1.

Μονάδες 5

Β3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 7**

Β4. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της f(x)=λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f:R→R με $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$, x∈R.

Γ1. Να δείξετε ότι f(x)<0, x∈R.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_f, x=0, $x=-\frac{3}{4}$.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση f:[0, 1] →R η οποία είναι συνεχής και ισχύει η σχέση:

$$\int_0^1 f^2(x)dx-2\int_0^1 xf(x)e^x dx=\frac{1}{4}(1-e^2).$$

Δ1. Να υπολογισθεί το $\int_0^1 x^2e^{2x}dx$.

Μονάδες 4

Δ2. Δείξτε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=xe^x$, x∈[0, 1].

Μονάδες 7

Δ3. **α)** Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Αν επιπλέον η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0, e] να υπολογισθεί το $I=\int_0^e f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)}dx$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν ισχύει $\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{\beta} f^{-1}(x)dx=e$ με α∈[0,1], β∈[0,e] να βρείτε τους αριθμούς α και β.

Μονάδες 8

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε x_1 $x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

● Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

● Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Α2.

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε

$f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

Α3. **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνεπώς και στο x=1, άρα

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2-1)=0,\ f(0)=0$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(e^{1-\alpha x}-\alpha)=e^{1-\alpha}-\alpha,\ \text{συνεπώς}:\ e^{1-\alpha}-\alpha=0.$$

Θεωρούμε $g(x)=e^{1-x}-x,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων με:
$g'(x)=e^{1-x}\cdot(1-x)'-1=-e^{1-x}-1<0$ άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Για x=1 είναι: $g(1)=e^{1-1}-1=0$. Το x=1 είναι μοναδική ρίζα αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και «1-1». Επομένως α=1.

B2. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{1-x}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to1^+}(-e^{1-x})=-1$ άρα

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=1.

B3. Για α=1 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le1\\ e^{1-x}-1, & x>1\end{cases}$

Για κάθε x<1 η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$f'(x)=(x^2-1)'=2x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0, f'(x)<0\Leftrightarrow x<0,\ f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(0,1)$.

Για κάθε x>1 η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων με $f'(x)=(e^{1-x}-1)'=e^{1-x}(1-x)'=-e^{1-x}<0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0],[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
f′	− 0	+ ‖	−
f	↘	↗	↘

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x=0 το $f(0)=0^2-1=-1$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=1 το f(1)=0.

Για το σύνολο τιμών έχουμε: $f((-\infty,0))=(\lim\limits_{x\to0^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=(-1,+\infty)$

αφού είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

$f([0,1])=[f(0),f(1)]=[-1,0]$

$f((1,+\infty))=(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x))=(-1,0)$,

αφού είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{1-x}-1)\overset{1-x=y}{=}\lim\limits_{y\to-\infty}(e^y-1)=-1$.

Το σύνολο τιμών της f είναι η ένωση των παραπάνω διαστημάτων, δηλαδή: $f(\mathbb{R})=f((-\infty,0))\cup f([0,1])\cup f((1,+\infty))=[-1,+\infty)$.

B4. Αν $\lambda<-1$ η εξίσωση f(x)=λ είναι αδύνατη γιατί $\lambda\notin f(\mathbb{R})$.

Αν $\lambda=-1$ η εξίσωση f(x)=λ έχει μοναδική λύση γιατί $\lambda\in f([0,1])$ η f είναι μονότονη στο [0,1] και $\lambda\notin f((-\infty,0)),\lambda\notin f((1,+\infty))$.

Αν $-1<\lambda<0$ η εξίσωση f(x)=λ έχει τρεις ακριβώς ρίζες γιατί $\lambda\in f([0,1]),\lambda\in f((-\infty,0)),\lambda\in f((1,+\infty))$ και η f είναι μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),[0,1],(1,+\infty)$.
Αν $\lambda=0$ η εξίσωση f(x)=λ έχει δύο ρίζες γιατί $\lambda\in f((-\infty,0))$, $\lambda\in f([0,1])$ η f είναι μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),[0,1]$ και $\lambda\notin f((1,+\infty))$.
Αν $\lambda>0$ η εξίσωση f(x)=λ έχει μοναδική λύση γιατί $\lambda\in f((1,+\infty))$ η f είναι μονότονη στο $(1,+\infty)$ και $\lambda\notin f((-\infty,0)),\lambda\notin f([0,1])$.

Θέμα Γ

Γ1. $f(x)<0\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>x$ (1)
Αν $x\geq 0$, $(1)\Rightarrow x^2+1>x^2\Leftrightarrow 1>0$, ισχύει
Αν $x<0$, η (1) ισχύει αφού $\sqrt{x^2+1}>0$.
Συνεπώς $f(x)<0$ για κάθε $x\in R$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Για κάθε $x\in R$, $f(x)<0\Leftrightarrow -f(x)>0$ και $\sqrt{x^2+1}>0$, $x\in R$, άρα $f'(x)>0$, $x\in R$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και «1-1», συνεπώς αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, f(R).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0,\ \text{αφού}\ \lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+1})=-\infty,\ \text{αφού}\ \lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, άρα

$$f(R)=(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,0).$$

$D_{f^{-1}}=(-\infty,0)$ Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow$

$$x-\sqrt{x^2+1}=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=x-y\Leftrightarrow x^2+1=(x-y)^2\Leftrightarrow$$

$x^2+1=x^2-2xy+y^2 \Leftrightarrow 2xy=y^2-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-1}{2y}$

Οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}, x<0.$

Γ3.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \overset{\Gamma 2}{=} \int_0^1 -\frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\left[\ln|f(x)|\right]_0^1 = -\ln(|f(1)|+\ln|f(0)| =$$

$$-\ln|1-\sqrt{2}|+\ln|-1| = -\ln(\sqrt{2}-1)$$

Γ4. Είναι f(x)<0, x∈R, άρα $E=-\int_{-\frac{3}{4}}^{0} f(x)dx$.

Θέτω $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$, $dx=(f^{-1}(u))'du$.

Για $x=-\dfrac{3}{4}$: $f^{-1}(u)=-\dfrac{3}{4}=f^{-1}(-2) \Leftrightarrow u=-2$

Για x=0: $f^{-1}(u)=0=f^{-1}(-1) \overset{f^{-1}\ \text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} u=-1$

$$E=-\int_{-2}^{-1} u(f^{-1}(u))'du = -[uf^{-1}(u)]_{-2}^{-1} + \int_{-2}^{-1} f^{-1}(u)du =$$

$$f^{-1}(-1)-2f^{-1}(-2)+\int_{-2}^{-1}\frac{u^2-1}{2u}du =$$

$$0-2\left(-\frac{3}{4}\right)+\int_{-2}^{-1}\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)du = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}-\ln|u|\right]_{-2}^{-1} =$$

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\ln 1-2+\ln 2\right)=\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα Δ

Δ1. $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(e^{2x})'dx = \frac{1}{2}[x^2e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{2}2\int_0^1 xe^{2x}dx =$

$$\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\int_0^1 x(e^{2x})'dx=$$

$$\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}[xe^{2x}]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}[e^{2x}]_0^1=\frac{1}{4}(e^2-1)$$

Δ2. Είναι:

$$\int_0^1 f^2(x)dx-2\int_0^1 xf(x)e^x dx=-\int_0^1 x^2e^{2x}dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx-\int_0^1 2xf(x)e^x dx+\int_0^1 (xe^x)^2dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (f(x)-xe^x)^2dx=0$$

Αν υπάρχει $x_0\in[0,1]$: $(f(x_0)-x_0e^{x_0})^2>0$, τότε $\int_0^1 (f(x)-xe^x)^2dx>0$, άτοπο. Άρα $(f(x)-xe^x)^2=0$, $x\in[0,1] \Rightarrow f(x)-xe^x=0 \Rightarrow f(x)=xe^x$, $x\in[0,1]$.

Δ3. α) Είναι $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x>0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, οπότε f «1–1», άρα αντιστρέφεται.

$$f([0,1])\overset{f\text{ συνεχής}}{\underset{f\uparrow}{=}}[f(0),f(1)]=[0,e]=A_{f^{-1}}$$

β) Είναι $f(0)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=0$ και $f(1)=e \Leftrightarrow f^{-1}(e)=1$.

$e\geq x\geq 0 \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} 1\geq f^{-1}(x)\geq 0$. Ισχύει $f(x)=xe^x$, $x\in[0,1]$, για x το $f^{-1}(x)$ έχουμε ότι:

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} \Rightarrow x=f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)},\ x\in[0,e]$$

Άρα $I=\int_0^e f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)}dx=\int_0^e xdx=\frac{1}{2}[x^2]_0^e=\frac{e^2}{2}$.

Δ4. Είναι $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^e f^{-1}(x)dx$ (1)

Θέτουμε $x=f(u)$, $dx=f'(u)du$ και

$x=0 \Leftrightarrow 0=f(u) \Leftrightarrow f(0)=f(u) \Leftrightarrow u=0$

$x=e \Leftrightarrow e=f(u) \Leftrightarrow f(1)=f(u) \Leftrightarrow u=1$, άρα

$$\int_0^e f^{-1}(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(f(u))f'(u)du = \int_0^1 uf'(u)du = \int_0^1 xf'(x)dx.$$

και (1): $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 (xf(x))'dx = [xf(x)]_0^1 = f(1) = e$

Ισχύει $\int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^\beta f^{-1}(x)dx = e \Leftrightarrow \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^\beta f^{-1}(x)dx =$

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^e f^{-1}(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\alpha f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_0^\beta f^{-1}(x)dx - \int_0^e f^{-1}(x)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^\alpha f(x)dx + \int_e^\beta f^{-1}(x)dx = 0$$

Είναι $f(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$ και $f^{-1}(x) \geq 0$, $x \in [0,e]$.

Αν $0 \leq \alpha < 1$, τότε $\int_1^\alpha f(x)dx < 0$.

Αν $0 \leq \beta < e$, τότε $\int_e^\beta f^{-1}(x)dx < 0$.

Δηλαδή, $\int_1^\alpha f(x)dx + \int_e^\beta f^{-1}(x)dx < 0$, άτοπο, άρα $\alpha=1$ και $\beta=e$.

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βυνιχάκης, Α. Δουλγεράκης, Μ. Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη, Π. Σιδερής, Α. Τσιλιφώνης.