ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:	

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και έχει ρίζα στο (α,β) τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$.

β) Αν $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ τότε η f γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

γ) Αν ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

δ) Αν η f συνεχής στο $A_1\cup A_2$ και $f'(x)=0$ για κάθε x στο εσωτερικό του $A_1\cup A_2$ τότε η f σταθερή στο $A_1\cup A_2$.

ε) Μια συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Θεωρούμε συναρτήσεις $f(x)=2x+\ln x-2$, $x>0$ $g(x)=\dfrac{2x-\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x>0$.

Β1. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 9

Β3. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=1$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

Μονάδες 10

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}+f'(x)+e^{-x}=0$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f(x)\le\dfrac{1}{e}=f(1)$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i) $f''(x)+f'(x)+e^{-x}=0,\ x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

ii) $f(x)=\dfrac{x}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει
$e^2f(\alpha+1)\ge -1+e^2f(\alpha)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g όταν $g(x)=xf(x)$.

Μονάδες 3

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x_0)=-3$ και συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+2h)-2g(x_0+h)+g(x_0)}{h^2}, & x=0\\ -e^x+x-2, & 0<x<1\\ \dfrac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2, & x\ge 1\end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln^2(x^2+2)-\ln^2(x^4+2)+2x^2<2\ln\left(\frac{x^2+2}{x^4+2}\right)+2x^4.$$

Μονάδες 6

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x)dx$.

Μονάδες 5

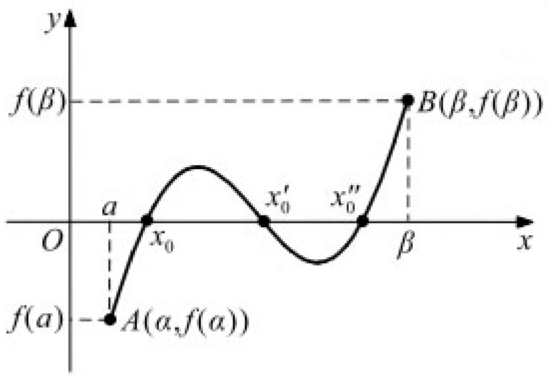
Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Πράγματι, αν $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως, $y'=\left(e^u\right)'=e^u u'=e^{\alpha\ln x}\alpha\frac{1}{x}=x^\alpha\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε : $f'(x_0)=0$

Α3. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β]. Επειδή τα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x'x, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Α4. **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα, διαφορά και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα, διαφορά και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$f'(x)=2+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Ισχύει : $f(1)=2+\ln 1-2=0$

Άρα για κάθε $x>1$ έχουμε:

$x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$

ενώ για κάθε $0<x<1$ έχουμε:

$x<1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$

x	0	1	$+\infty$
f	$-$		$+$

Β2. Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά, πηλίκο και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά πηλίκο και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x)=\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)2\sqrt{x}-(2x-\ln x)\left(2\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4x}=\frac{4\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}}{x}-\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{4x}=$$

$$\frac{\frac{4x^2-2x-2x^2+x\ln x}{x\sqrt{x}}}{4x}=\frac{x(2x-2+\ln x)}{x\sqrt{x}4x}=\frac{f(x)}{4x\sqrt{x}}\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{f(x)}{4x\sqrt{x}},\ x>0$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $4x\sqrt{x}>0$ άρα

$$g'(x)>0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{4x\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow x>1$$

Αφού η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και σύμφωνα με το διπλανό πίνακα θα ισχύουν:

x	0	1	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$,

η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

η g παρουσιάζει για $x_0=1$ ολικό ελάχιστο το $g(1)=1$.

Β3. Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα για κάθε $x\in(0,1)$ με $x<1$ ισχύει: $x<1\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(1)\Leftrightarrow g(x)>1$

άρα η $g(x)=1$ δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα για κάθε $x\in(1,+\infty)$ με $x>1$

ισχύει: $x>1\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(1)\Leftrightarrow g(x)>1$

άρα η $g(x)=1$ δεν έχει ρίζα στο $(1,+\infty)$
Αλλά $g(1)=1$ άρα η $g(x)=1$ έχει μοναδική θετική ρίζα το $x_0=1$ στο $(0,+\infty)$.

Θέμα Γ

Γ1. i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f''(x+2h)-f''(x+h)}{1}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(2f''(x+2h)-f''(x+h)\right)=f''(x)$ (αφού f'' συνεχής).

Άρα $f''(x)+f'(x)+e^{-x}=0,\ x\in\mathbb{R}$

ii) $f''(x)+f'(x)+e^{-x}=0\Leftrightarrow\left(f'(x)+f(x)-e^{-x}\right)'=0$ επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής $f'(x)+f(x)-e^{-x}=c$, (3)

Ισχύει από (2) $f(1)=\dfrac{1}{e}$ και $f(x)\le f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα ισχύει το θεώρημα Fermat. Συνεπώς $f'(1)=0$

Για $x=1$ στην (3) έχουμε: $0+\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}=c\Leftrightarrow c=0$ άρα

$f'(x)+f(x)-e^{-x}=0\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)-1=0\Leftrightarrow\left(e^xf(x)-x\right)'=0$ επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής $e^xf(x)-x=c_1$ (4)

Για $x=1$ στην (4) έχουμε: $e^1f(1)-1=c_1\Leftrightarrow e\dfrac{1}{e}-1=c_1\Leftrightarrow c_1=0$

Συνεπώς $e^xf(x)-x=0\Leftrightarrow e^xf(x)=x\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x}{e^x},x\in\mathbb{R}$

Γ2. $f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x},x\in\mathbb{R}$

$f''(x)=\dfrac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x(-1-1+x)}{e^{2x}}=\dfrac{x-2}{e^x}\ x\in\mathbb{R}$

Είναι $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{e^x}>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Άρα η f κυρτή στο $[2,+\infty)$
και κοίλη στο $(-\infty,2]$
Η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $(2,f(2))$ ή $\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$
αφού αλλάζει η κυρτότητα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩		∪

εκατέρωθεν του $x_1=2$ και δέχεται εφαπτομένη στο $\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$ αφού είναι παραγωγίσιμη.

Γ3. $e^2f(\alpha+1)\geq -1+e^2f(\alpha) \Leftrightarrow e^2(f(\alpha+1)-f(\alpha))\geq -1 \Leftrightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)\geq -\dfrac{1}{e^2}$

Η f συνεχής στο [α,α+1]
Η f παραγωγίσιμη στο (α,α+1)
οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}=f(\alpha+1)-f(\alpha)$

Η f' παρουσιάζει στο $x_1=2$ ολικό ελάχιστο το $f'(2)=-\dfrac{1}{e^2}$ αφού η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ και αλλάζει η μονοτονία εκατέρωθεν του $x_1=2$ όπως φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f'	↘		↗

Συνεπώς ισχύει $f'(x)\geq -\dfrac{1}{e^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η παραπάνω σχέση για $x=\xi$ δίνει $f'(\xi)\geq -\dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)\geq -\dfrac{1}{e^2}$

Γ4. $g(x)=xf(x)=x\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{x^2}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{1}{e^x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{-x}\right)=-\infty$$

άρα η C_g δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

Θέμα Δ

Δ1. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x_0+2h)-2g(x_0+h)+g(x_0)}{h^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2g'(x_0+2h)-2g'(x_0+h)}{2h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g'(x_0+2h)-g'(x_0+h)}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g'(x_0+2h)-g'(x_0)-g'(x_0+h)+g'(x_0)}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{g'(x_0+2h)-g'(x_0)}{h} - \dfrac{g'(x_0+h)-g'(x_0)}{h} \right)$ (1) αλλά

- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g'(x_0+h)-g'(x_0)}{h} = g''(x_0)$
- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g'(x_0+2h)-g'(x_0)}{h} \overset{2h=\omega}{=} \lim\limits_{\omega\to 0} \dfrac{g'(x_0+\omega)-g'(x_0)}{\frac{\omega}{2}} =$

$\lim\limits_{\omega\to 0} 2\dfrac{g'(x_0+\omega)-g'(x_0)}{\omega} = 2g''(x_0)$

αφού η g δυο φορές παραγωγίσιμη. Τότε η (1) γίνεται:

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x_0+2h)-2g(x_0+h)+g(x_0)}{h^2} = 2g''(x_0)-g''(x_0) = g''(x_0) = -3$

Συνεπώς $f(x) = \begin{cases} -3, & x=0 \\ -e^x+x-2, & 0<x<1 \\ \dfrac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2, & x\geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-e^x+x-2) = -3$ και $f(0)=-3$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-e^x + x - 2) = -e-1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln^2 x}{2} + x - \ln x - e - 2\right) = -e-1$$

Συνεπώς $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -e-1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = -e-1$ και $f(1) = -e-1$ άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως διαφορά εκθετικής και πολυωνυμικής.
Η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση διαφορά και άθροισμα λογαριθμικής και πολυωνυμικής.
Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Δ2. $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-e^x + x - 2 + e + 1}{x-1} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{D.L.H}{=}} \lim_{x\to 1^-}\frac{-e^x+1}{1} = 1-e$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ln^2 x}{2} + x - \ln x - e - 2 + e + 1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}\ln x + 1 - \frac{1}{x}}{1} = 0$$

άρα $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x) = 1 - e^x$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}\ln x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{\ln x + (x-1)}{x} > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ αφού $x - 1 > 0$ και $\ln x > 0$.
Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Τότε σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα:
η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$,
η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,
η f παρουσιάζει για x=0 τοπικό μέγιστο το $f(0) = -3$, η f παρουσιάζει για x=1 ολικό ελάχιστο το $f(1) = -e-1$.

x	0	1	$+\infty$
f′	$-$		$+$
f	↘		↗

Δ4. $\ln^2(x^2+2) - \ln^2(x^4+2) + 2x^2 > 2\ln\left(\frac{x^2+2}{x^4+2}\right) + 2x^4 \Leftrightarrow$

$\ln^2(x^2+2) - \ln^2(x^4+2) + 2x^2 > 2\ln(x^2+2) - 2\ln(x^4+2) + 2x^4 \Leftrightarrow$

$$\ln^2(x^2+2)-2\ln(x^2+2)+2x^2>\ln^2(x^4+2)-2\ln(x^4+2)+2x^4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln^2(x^2+2)}{2}-\ln(x^2+2)+x^2>\frac{\ln^2(x^4+2)}{2}-\ln(x^4+2)+x^4 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2+2)>f(x^4+2) \underset{x^4+2>1}{\overset{x^2+2>1}{\Leftrightarrow}} x^2+2>x^4+2 \Leftrightarrow x^2(1-x^2)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

Δ5. $\int_0^e f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^e f(x)dx$

$$\bullet \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-e^x+x-2)dx=\left[-e^x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1=$$

$$\left(-e^{-1}+\frac{1}{2}-2\right)-(-1)=-e^{-1}-\frac{1}{2}$$

$$\bullet \int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2\right)dx=$$

$$\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)dx-\int_1^e \ln x dx+\int_1^e(x-e-2)dx$$

$$\bullet \int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)dx-\int_1^e \ln x dx=\int_1^e\left(x'\frac{\ln^2 x}{2}\right)dx-\int_1^e \ln x dx=$$

$$\left[x\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e-\int_1^e\left(x2\ln x\frac{1}{x}\right)dx-\int_1^e \ln x dx=\frac{e}{2}-3\int_1^e \ln x dx=$$

$$\frac{e}{2}-3\int_1^e x'\ln x dx=\frac{e}{2}-3\left([x\ln x]_1^e-\int_1^e 1dx\right)=\frac{e}{2}-3\left(e-[x]_1^e\right)=\frac{e}{2}-3$$

$$\bullet \int_1^e(x-e-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-ex-2x\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}-e^2-2e\right)-\left(\frac{1^2}{2}-e-2\right)=\frac{3}{2}-\frac{e^2}{2}-e$$

Συνεπώς $\int_0^e f(x)dx=-e^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{e}{2}-3+\frac{3}{2}-\frac{e^2}{2}-e=-\frac{e^2+e+2e^{-1}+4}{2}$

**Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Ι. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βυνιχάκης, Α. Δουλγεράκης, Μ. Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη,
Π. Σιδερής, Α. Τσιλιφώνης.**