ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:	

Θέμα Α

Α1. Δίνονται οι συναρτήσεις F(x), f(x), g(x) με F(x)=f(x)+g(x). Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f(x), g(x) είναι παραγωγίσιμες τότε : F΄(x)=f΄(x)+g΄(x). **Μονάδες 7**

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων , όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός. **Μονάδες 8**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα σε έναν άξονα είναι x(t) την χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητά του είναι: $v(t)=x'(t)$.

β) Αν μία συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$ και είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)<0$ τότε δεν παρουσιάζει ακρότατα.

γ) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

δ) Σε μια κανονική κατανομή είναι $s\simeq\frac{R}{6}$.

ε) Αν $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=B$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι παρακάτω τιμές μιας μεταβλητής:
-3, 2lnx+1, 4,-2x με x>0

Β1. Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία η μέση τιμή των παραπάνω τιμών γίνεται μέγιστη καθώς και τη μέγιστη τιμή της.

Μονάδες 13

Β2. Για x=1 να υπολογιστούν για τις παραπάνω τιμές η διάμεσος, το εύρος και η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 12

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{11}{2}x^2+3x+e^{2017}$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

Μονάδες 6

Γ2. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με P(A), P(B) οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f(x) , με P(A)<P(B) να δείξετε ότι P(A)=0.5 και P(B)=0.6.

Μονάδες 3

Γ3. Να δείξετε ότι δεν είναι ασυμβίβαστα και ότι $0,1\le P(A\cap B)\le 0,5$

Μονάδες 7

Γ4. Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα Α,Β είναι 0.7, να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

i) Να πραγματοποιηθούν αμφότερα τα Α, Β.

ii) Να πραγματοποιηθεί ένα ακριβώς από τα Α, Β.

iii) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β.

Μονάδες 9

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{2}{3}x^3-(s+\overline{x})x^2+2s\overline{x}x+\sqrt{2017}$ με $\overline{x}<0$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος παρατηρήσεων.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

Μονάδες 6

Δ2. Αν η παραπάνω συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -5$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 2$ υπολογίστε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και εξετάστε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

Μονάδες 4

Δ3. Να βρεθεί η διάμεσος των τιμών f(-4),f(-3),f(0),f(1),f(2).

Μονάδες 4

Δ4. Υπολογίστε τη μικρότερη τιμή της θετικής σταθεράς $c\ge 6$ που πρέπει να προσθέσουμε στις τιμές της μεταβλητής του παραπάνω δείγματος ώστε να γίνει ομοιογενές.

Μονάδες 6

Δ5. Οι θερμοκρασίες στην πόλη Φρόσμπουργκ των ΗΠΑ το μήνα

Νοέμβριο του 2016 (30 ημέρες) ακολούθησαν σχεδόν κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}=-5$ και τυπική απόκλιση s=2(βαθμούς Κελσίου).Να βρεθεί το ποσοστό και το πλήθος των ημερών (κατά προσέγγιση) του μήνα Νοεμβρίου που η θερμοκρασία ήταν:

i) Πάνω από -5° C.
ii) Από -9° C έως -3° C.
iii) Κάτω από -7° C.

Μονάδες 5

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Σελ 31 σχολικό βιβλίο
Α2. Σελ 87 σχολικό βιβλίο
Α3. **α)** Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

Θέμα Β

Β1. Η μέση τιμή των παραπάνω τιμών είναι:

$\bar{x}=\frac{-3-2x+2\ln x+1+4}{4}=\frac{2\ln x-2x+2}{4}$ επομένως:

$\bar{x}=\frac{2(\ln x-x+1)}{4}=\frac{1}{2}(\ln x-x+1)$.Ορίζω $f(x)=\ln x-x+1$ με x>0. Είναι :

$f'(x)=(\ln x-x+1)'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ Επομένως :

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}=0\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1$. Επίσης για 0<x<1 είναι:

$1-x>0\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}>0\Leftrightarrow f'(x)>0$ επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, ενώ για x>1 είναι: $1-x<0\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}<0\Leftrightarrow f'(x)<0$ δηλαδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Στο x=1 παρουσιάζει μέγιστο με τιμή $f(1)=\ln 1-1+1=0$ συνεπώς η μέγιστη τιμή της μέσης τιμής θα είναι:

$\bar{x}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$.

Β2. Για x=1 οι τιμές είναι: -3, -2, 1, 4. Το εύρος είναι:

$R=4-(-3)=4+3=7$, ενώ η διάμεσος: $\delta=\dfrac{-2+1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Είναι: $s^2=\dfrac{1}{4}[(-3-0)^2+(-2-0)^2+(1-0)^2+(4-0)^2]$ επομένως

$s^2=\dfrac{1}{4}(9+4+1+16)=\dfrac{30}{4}\Rightarrow s=\sqrt{\dfrac{30}{4}}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με:

$f'(x)=(\dfrac{10}{3}x^3-\dfrac{11}{2}x^2+3x+e^{2017})'=\dfrac{10}{3}3x^2-\dfrac{11}{2}2x+3$ Είναι:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 10x^2-11x+3=0$ με διακρίνουσα Δ=121-120=1 και ρίζες

$x=\dfrac{3}{5}=0.6$, $x=\dfrac{1}{2}=0.5$

Ο πίνακας μονοτονίας είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$ 1/2	3/5	$+\infty$
f΄(x)	+	−	+
f(x)	↑	↓	↑

Για $x\le\dfrac{1}{2}$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Για $\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{5}$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x\ge\dfrac{3}{5}$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=\dfrac{1}{2}$ με τιμή:

$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{1}{8}-\dfrac{11}{2}\cdot\dfrac{1}{4}+3\cdot\dfrac{1}{2}+e^{2017}=\dfrac{13}{24}+e^{2017}$

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=\frac{3}{5}$ με τιμή:

$$f(\frac{3}{5})=\frac{10}{3}\cdot\frac{27}{125}-\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{25}+3\cdot\frac{3}{5}+e^{2017}=\frac{1}{2}+e^{2017}$$

Γ2. Οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων είναι: x=0.5 και x=0.6 και επειδή ισχύει: $P(A)<P(B)$ θα έχουμε P(A)=0.5 και P(B)=0.6 .

Γ3. Αν ήταν ασυμβίβαστα $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,6+0,5=1,1>1$ Άτοπο. Επομένως δεν είναι ασυμβίβαστα. Είναι $A\cap B\subseteq A$ και $A\cap B\subseteq B$ επομένως: $P(A\cap B)\le P(A)\le P(B)\Rightarrow P(A\cap B)\le 0.5$ Επίσης:
$P(A\cup B)\le 1\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1\Leftrightarrow 1.1-1\le P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)\ge 0.1$

Γ4. i) Επειδή η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A,B είναι 0.7είναι: $P((A\cap B)')=0.7\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=0.7\Leftrightarrow P(A\cap B)=0.3$
Επομένως η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν αμφότερα τα Α, Β είναι: $P(A\cap B)=0.3$.

ii) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ακριβώςαπό τα Α, Β δηλαδή μόνο το Α ή μόνο το Β είναι: $P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)$, επειδή τα 2 ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα. Επομένως:
$P((A-B)\cup P(B-A))=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(B\cap A)$ δηλαδή:
$P((A-B)\cup P(B-A))==P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=0.5$

iii) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα Α, Β. Επομένως: Ενώ:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1.1-0.3=0.8$, συνεπώς:
$P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2$.

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=(\frac{2}{3}x^3-(s+\bar{x})x^2+2s\bar{x}x+\sqrt{2017})'=2x^2-2(s+\bar{x})x+2s\bar{x}$$ και έχουμε:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-2(s+\bar{x})x+2s\bar{x}=0$. Είναι:

$\Delta=[-2(s+\bar{x})]^2-4\cdot2\cdot2s\bar{x}=4[(s+\bar{x})^2-4s\bar{x}]\Leftrightarrow$

$\Delta=4(s^2+2s\bar{x}+x^2-4s\bar{x})=4(s^2-2s\bar{x}+x^2)=4(s-\bar{x})^2>0$ αφού η τυπική απόκλιση s είναι θετική και η μέση τιμή $\bar{x}<0$ επομένως
$\bar{x}<0\Leftrightarrow-\bar{x}>0\Leftrightarrow s-\bar{x}>0$. Συνεπώς έχουμε:

$$x_1=\frac{2(s+\bar{x})+2(s-\bar{x})}{2\cdot2}=\frac{2(s+\bar{x}+s-\bar{x})}{4}=\frac{2s}{2}=s$$ καθώς και:

$x_2=\dfrac{2(s+\bar{x})-2(s-\bar{x})}{2\cdot 2}=\dfrac{2(s+\bar{x}-s+\bar{x})}{4}=\dfrac{2\bar{x}}{2}=\bar{x}$. Ο πίνακας μονοτονίας είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	$\bar{x}$	s	$+\infty$
f΄(x)	+	−	+	
f(x)	↑	↓	↑	

Για $x\le\bar{x}$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
Για $\bar{x}\le x\le s$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.
Για $x\ge s$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=\bar{x}$ με τιμή:

$$f(\bar{x})=\frac{2}{3}\bar{x}^3-(s+\bar{x})\bar{x}^2+2s\bar{x}^2+\sqrt{2017}=-\frac{1}{3}\bar{x}^3+s\bar{x}^2+\sqrt{2017}$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=s$ με τιμή:

$$f(s)=\frac{2}{3}s^3-(s+\bar{x})s^2+2s\bar{x}s+\sqrt{2017}=-\frac{1}{3}s^3+s^2\bar{x}+\sqrt{2017}.$$

Δ2. Επειδή η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=\bar{x}$ καθώς και τοπικό ελάχιστο για $x=s$ είναι: $\bar{x}=-2$, $s=5$ καθώς και

$CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}\cdot 100\%=\dfrac{2}{5}\cdot 100\%=40\%>10\%$ επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Δ3. Από τα προηγούμενα ερωτήματα βρήκαμε ότι για $-5\le x\le 2$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπώς ισχύει:

$-4<-3<0<1<2\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(2)<f(1)<f(0)<f(-3)<f(-4)$ και επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 5 (περιττός αριθμός) η διάμεσος είναι η τρίτη παρατήρηση επομένως δ=f(0)= $\sqrt{2017}$

Δ4. Η νέες τιμές την μεταβλητής είναι $y_i=x_i+C$ και σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύουν: $\bar{y}=\bar{x}+c$ και $s_y=s$. Επομένως:

$CV_y=\dfrac{s_y}{\bar{y}}=\dfrac{2}{|\bar{x}+c|}$ και για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει:

$CV_y \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|\bar{x}+c|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\bar{x}+c| \ge 20$ επομένως:

$\bar{x}+c \ge 20 \Leftrightarrow -5+c \ge 20 \Leftrightarrow c \ge 25$ επομένως c=25 ή $\bar{x}+c \le -20 \Leftrightarrow c \le -15$ η οποία τιμή απορρίπτεται αφού $c \ge 6$.

Δ5. i) Γνωρίζουμε σε μία κανονική κατανομή ότι η μέση τιμή ισούται με τη διάμεσο επομένως πάνω από -5° C (που είναι η διάμεσος) βρίσκεται το 50% των ημερών και εφαρμόζοντας των τύπο $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$ έχουμε:

$30 \cdot 0,5 = 15$ ημέρες.

ii) Σύμφωνα με την κανονική κατανομή από $\bar{x} - 2s = -5 - 2 \cdot 2 = -9$ έως $\bar{x} + s = -5 + 2 = -3$ έχουμε το 13,5%+68%=81,5% και σε ημέρες αυτό σημαίνει: $0,815 \cdot 30 = 24,45$ περίπου δηλαδή 24 ημέρες.

iii) Σύμφωνα πάντα με την κανονική κατανομή κάτω από $\bar{x} - s = -5 - 2 = -7$ έχουμε το $0,15\% + 2.35\% + 13,5\% = 16\%$ και σε ημέρες είναι: $0,16 \cdot 30 = 4,8$ δηλαδή περίπου 5 ημέρες.

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βυνιχάκης, Α. Δουλγεράκης,
Μ. Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη, Π. Σιδερής, Α. Τσιλιφώνης.