

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**  
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 \in A$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει

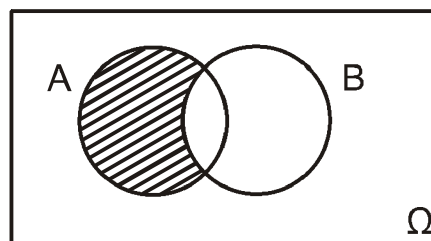
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**β)** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$ , με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**γ)** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

**δ)** Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει ότι  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**ε)** Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο  $B - A$ .



**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$  και οι αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$  που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$ .

$x_i$	$v_i$
1	2
3	3
5	4
9	1

**B1.** Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν:

- α. η μέση τιμή  $\bar{x}$  (μονάδες 6)
- β. η διάμεσος  $\delta$  (μονάδες 5)
- γ. η διακύμανση  $s^2$ . (μονάδες 7)

**Μονάδες 18**

**B2.** Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$ .

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία ( $\epsilon$ ) του ερωτήματος **Γ2** τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$ .

**Μονάδες 8**

## ΘΕΜΑ Δ

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

**Δ1.** Να κατασκευάσετε το δένδροδιάγραμμα που περιγράφει το παραπάνω πείραμα (μονάδες 3) και να γράψετε τον δειγματικό χώρο  $\Omega$  του πειράματος (μονάδες 2)

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A: «η δεύτερη μπάλα που θα εξαχθεί να είναι μαύρη»

B: «να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος»

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  του προηγούμενου πειράματος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B είναι τα ενδεχόμενα του ερωτήματος Δ2.

**α.** Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$A'$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ . (μονάδες 8)

**β.** Αν  $\Gamma$  είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου  $\Omega$ , το οποίο είναι ασυμβίβαστο τόσο με το ενδεχόμενο A όσο και με το ενδεχόμενο B, να υπολογίσετε ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα  $P(\Gamma)$ . (μονάδες 6)

**Μονάδες 14**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 31.
- A2.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14.
- A3.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 72:  
Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.
- A4.** α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Για τη μέση τιμή  $\bar{x}$  είναι:

α. 
$$\bar{x} = \frac{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 + v_4 \cdot x_4}{10} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 9}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

β. Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι:

1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 9.

Το μέγεθος του δείγματος είναι  $n=10$  που είναι άρτιος αριθμός. Έτσι

$$d = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

γ.

$$s^2 = \frac{v_1(x_1 - \bar{x})^2 + v_2(x_2 - \bar{x})^2 + v_3(x_3 - \bar{x})^2 + v_4(x_4 - \bar{x})^2}{10} =$$
$$= \frac{2(1-4)^2 + 3(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 1(9-4)^2}{10} =$$
$$= \frac{2 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 25}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

**B2.** Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές υπολογίζουμε το συντελεστή

μεταβολής  $cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > \frac{10}{100}.$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 2x - 1$ .

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών της  $f$ .

$x$	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'$	$-$		$+$
$f$	↘		↗

$$\text{Είναι } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Άρα η  $f$  παρουσιάζει στη θέση  $x = 1/2$ , ελάχιστο  $f(1/2) = 3/4$ .

Γ2. Είναι  $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$ , οπότε  $A(2, 3)$ .

Έστω  $y = ax + \beta$  η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(2, 3)$ . Τότε θα έχουμε:

$$3 = 2\alpha + \beta \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \alpha = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε  $\beta = -3$ .

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ( $\epsilon$ ) στο σημείο  $A(2, 3)$  είναι

$$y = 3x - 3 \quad (\epsilon).$$

Γ3.

- Για  $y = 0$  η ( $\epsilon$ ) γράφεται  $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .  
Επομένως η ( $\epsilon$ ) τέμνει τον  $x$ -αξονα στο σημείο  $B(1, 0)$ .
- Για  $x = 0$  η ( $\epsilon$ ) γράφεται  $y = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow y = -3$   
Επομένως η ( $\epsilon$ ) τέμνει τον  $y$ -αξονα στο σημείο  $\Gamma(0, -3)$ .

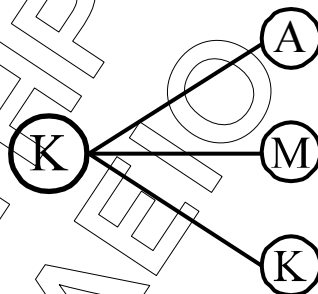
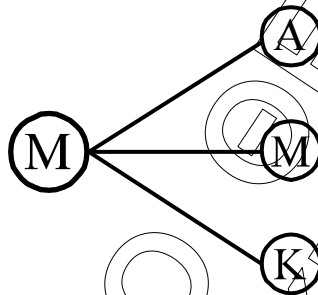
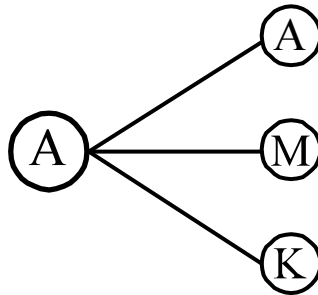
Γ4. Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x-1} &= \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x-1} = \frac{x^2 - x + 1 - 1}{(x-1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \frac{x^2 - x}{(x-1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το πείραμα προκύπτει το εξής δενδροδιάγραμμα:



Έτσι ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{ AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK \}$$

Δ2.  $A = \{ AM, MM, KM \}$   
 $B = \{ AM, AK, MA, MK, KA, KM \}$

Δ3. α. Από το Δ2 προκύπτει ότι:  
 $N(A) = 3$ ,  $N(B) = 6$ , ενώ  $N(\Omega) = 9$ .

Έτσι είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \text{ άρα } P(A') = 1 - P(A) = \frac{2}{3}.$$

$A \cap B = \{ AM, KM \}$ , με  $N(A \cap B) = 2$ , άρα:

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}.$$

- $A - B = \{ MM \}$ ,  $N(A - B) = 1$ , άρα:

$$P(A - B) = \frac{N(A - B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}.$$

- $B - A = \{ AK, MA, MK, KA \}$ ,  $N(B - A) = 4$ , άρα:

$$P(B - A) = \frac{N(B - A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{9}.$$

β) Για να είναι το ενδεχόμενο  $\Gamma$  ασυμβίβαστο τόσο με το  $A$ , όσο και με το  $B$ , δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο  $A \cup B$ .

Άρα το  $\Gamma$  είναι υποσύνολο του  $(A \cup B)' = \{ AA, KK \}$ .

$$\text{Άρα } \Gamma \subseteq (A \cup B)' \Rightarrow P(\Gamma) \leq P[(A \cup B)'] \Rightarrow P(\Gamma) \leq \frac{2}{9}.$$

Προκύπτει ότι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η  $P(\Gamma)$  είναι  $\frac{2}{9}$ .

### β' τρόπος

Για να είναι το ενδεχόμενο  $\Gamma$  ασυμβίβαστο τόσο με το  $A$ , όσο και με το  $B$ , δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο  $A \cup B$ .

Άρα θα είναι:

$$\Gamma = \{ AA \} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{1}{9} \text{ ή}$$

$$\Gamma = \{ KK \} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{1}{9} \text{ ή}$$

$$\Gamma = \{ AA, KK \} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{2}{9}.$$

Προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή για το  $P(\Gamma)$  είναι  $\frac{2}{9}$ .